

Prolégomènes « épistémographiques » à l'étude des transitions dans l'enseignement des mathématiques

Jean-Philippe Drouhard
IUFM et IREM de Nice (France) - UMR "ADEF" (Marseille, France)

Résumé

Nous nous proposons d'aborder la question des transitions par l'identification (différentielle) des savoirs, autrement dit, ce que les élèves sont supposés savoir, en mathématiques, à la fin de l'enseignement secondaire et au début de l'université. L'analyse des savoirs de référence sera faite en termes d'un modèle théorique de l'organisation des connaissances appelé « épistémographie », consistant à organiser des savoirs en cinq composantes, réparties en trois ordres. Lors de la présentation à EMF 2006, nous présenterons une analyse en termes épistémographiques du passage d'une analyse plutôt « empirique » au niveau du secondaire (avec connaissance de fonctions de références et de leurs propriétés) à une analyse hypothético-déductive à l'université

Introduction

Dans le document de présentation du groupe 6, il est dit que :

L'enseignement universitaire, de par son formalisme, est d'emblée en opposition avec les approches adoptées au secondaire. Selon de nombreux travaux de didactique, un tel formalisme tendrait à déstabiliser les étudiants du premier cycle universitaire et serait à la source de nombreux échecs.

Nous n'imaginons pas qu'il y ait grand monde qui puisse réfuter le constat que l'enseignement universitaire soit formaliste. Mais pour autant cela ne signifie pas que cette notion de formalisme soit claire et encore moins opératoire. Qu'entend-on exactement par « enseignement formaliste » ? Un type de discours ? Un *modus operandi* ? C'est-à-dire, une manière de faire les mathématiques ? Ou bien une manière de les exposer ? Ou encore, une manière dont les professeurs exigent que leurs étudiants les exposent ? Ou tout à la fois ? Dans tous les cas, pour pouvoir étudier scientifiquement la question de l'effet de ce formalisme sur la réussite des étudiants, on a intérêt à savoir de quoi on parle et surtout quels sont les composants et les caractéristiques dudit formalisme. Une telle analyse permettra alors d'aborder la question suivante du document de présentation :

Comment évolue la conception des mathématiques que se font les étudiants des mathématiques pendant leurs deux premières années à l'université ?

Là aussi, en effet, on a intérêt à se poser la question : « la conception *de quel aspect* des mathématiques ? ». S'il s'agit par exemple de leur aspect formel (ou formalisé, ou formaliste) on en revient aux interrogations précédentes. Plus loin, dans le même document, les questions suivantes sont posées :

- Comment sont vécus les sauts conceptuels relatifs à certains concepts mathématiques clefs (fonction, limite, nombre, matrice, équation) chez les nouveaux venus à l'université
- Quelles sont les difficultés et les obstacles engendrés par le symbolisme mathématique ou plus généralement par le formalisme chez ces étudiants ?

Ces deux questions nous paraissent bien entrer dans le champ d'un programme de recherche que l'auteur de la présente communication mène depuis maintenant plusieurs années intitulé « épistémographie » (Drouhard, à paraître, Bagni, à paraître), dans la continuité des travaux antérieurs sur les ordres de connaissances (Sackur et al., 2005, Assude & Drouhard, 2005, Drouhard & Panizza, à paraître, Panizza & Drouhard, 2003) menés au sein de l'équipe *CESAME*. Les notions de « concepts mathématiques clefs » et de « symbolisme mathématique » sont (moyennant reconceptualisation) au centre des préoccupations de l'épistémographie. Ce nom ("épistémographie") a été choisi pour signifier qu'il s'agit d'étudier l'organisation des savoirs (et non la nature ou l'histoire des savoirs, comme en épistémologie).

Dans cette communication nous souhaitons montrer l'intérêt de poser les questions de transition entre secondaire et supérieur en mathématiques en termes « épistémographiques ». Cette analyse permettra alors d'aborder, entre autres, les questions de formation des enseignants : là comme ailleurs, l'illusion de la transparence est un obstacle à une bonne perception de la part des enseignants des difficultés des apprenants, illusion renforcée par le fait que le savoir enseigné à l'université paraît plus proche de ce que Chevallard appelle le savoir savant. L'épistémographie, mettant en relief ce qui est effectivement en jeu dans l'enseignement au-delà des évidences, s'attaque directement à ce type d'illusion.

Notre démarche:

Objet d'étude

Nous nous proposons d'aborder la question des transitions par l'identification (différentielle) des savoirs, autrement dit, ce que les élèves sont supposés savoir et savoir produire, en mathématiques, à la fin de l'enseignement secondaire et au début de l'université.

L'analyse des **savoirs** de référence sera faite en termes d'épistémographie (autrement dit en analysant l'organisation des savoirs en différents types et ordres).

Les composantes de l'activité mathématique.

Pour faire des mathématiques, il faut pouvoir opérer (dans un certain but) sur des objets mathématiques, accessibles au travers de représentations sémiotiques, avec des instruments, en suivant des règles. Nous proposons une typologie des savoirs nécessaires pour mener une activité mathématique, répartis en trois ordres :

Savoirs d'ordre I

- Savoirs conceptuels (des objets et de leurs relations)
- Savoirs sémiolinguistiques (des systèmes sémiotiques de représentation)
- Savoirs instrumentaux (des instruments de travail)

Savoirs du d'ordre II

- Les principes du jeu mathématique

Savoirs d'ordre III

- savoirs permettant l'identification du caractère mathématique de l'activité, ou du domaine des mathématiques concerné.

Ordre I : Savoirs conceptuels

La composante conceptuelle de l'épistémographie mathématique regroupe les savoirs portant sur les objets mathématiques et leurs relations (c'est-à-dire les propriétés, ou les énoncés des états de fait mathématiques), munis de leur valeur épistémique théorique, ainsi que les métasavoirs correspondants (« méta » au sens strict, c'est-à-dire savoirs sur ces savoirs-là). Concernant la valeur épistémique, on ne peut mener une activité mathématique sans connaître à la fois les relations entre les objets et le caractère certain ou seulement hypothétique de ces relations.

Ordre I : Savoirs sémiolinguistiques

Nous n'avons pas d'accès direct, sensoriel par exemple, aux objets mathématiques, qui sont abstraits par nature. Nous n'y avons accès qu'au travers de signes (des chiffres, des lettres, des tableaux, des tracés de segments, de graphes de fonctions...) qui les représentent. Nous paraphraserons la formule fameuse de Duval (1995 p. 5)¹ comme suit : Il n'y a pas de noésis possible sans *savoirs sémiolinguistiques*.

La composante sémiolinguistique de l'épistémographie regroupe précisément ces savoirs sémiotiques (et leurs métasavoirs). Il importe d'avoir sans cesse présent à l'esprit trois distinctions fondamentales.

La distinction signe / objet

La première distinction, que nous venons de mettre en œuvre plus haut par le fait même d'introduire une composante sémiolinguistique, est celle qui consiste à distinguer l'objet représenté (par exemple le nombre deux) du signe (le chiffre « 2 ») qui le représente. Cette distinction (voir Duval, 1998a, 1998b), apparaît même dans le vocabulaire des mathématiciens (dans le cas de la distinction nombre/chiffre par exemple). Ce qui est parfois plus difficile, c'est de percevoir à la fois sa portée, universelle - toute représentation, écrite, dessinée, voire mentale, est un signe qui se réfère (de manière plus ou moins complexe) à un objet - et son importance didactique, primordiale².

La distinction signe / réalisation matérielle

Un signe n'est et ne doit en aucun cas être assimilé à sa réalisation matérielle. « *x* » n'est un signe qu'en tant qu'il s'oppose, par exemple à « *y* » et, en tant qu'ensemble de traits différentiels, ce n'est pas un objet matériel, contrairement à sa réalisation matérielle (la surface encrée ou bien les pixels qui forment le « *x* » noir sur fond blanc)³.

1 « Si on appelle **sémiosis** l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, et **noésis** les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet, la discrimination d'une différence ou la compréhension d'une inférence (...) l'analyse des problèmes d'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître (...) une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée : il n'y a pas de *noésis* sans **sémiosis**, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même. »

2 indiquons rapidement que son importance ne se limite pas aux cas bien connus de la différence entre chiffre et nombre des dizaines, ou dessin et figure par exemple, mais qu'elle est au cœur de bon nombre des difficultés que les élèves vont rencontrer dans l'apprentissage de l'algèbre, difficultés qui, si elles ne sont pas surmontées, vont enrayer tout ce qui a trait au sens dans les écritures mathématiques ensuite, autrement dit la plupart des apprentissages mathématiques ultérieurs.

3 Sur ce point nous divergeons totalement de l'analyse proposée par M. Bosch (dans un cadre théorique certes différent) en termes de distinction ostensif / non ostensif

La distinction entre systèmes sémiotiques analogiques et discrets

Une première distinction sépare les signes qui sont soit présents soit absents de ceux qui, insérés dans un système, sont définis par un ensemble de différences (avec les autres signes). Ces différenciations caractéristiques sont ses traits pertinents (ou traits caractéristiques) (Ducrot & Schaeffer, 1995, article « Signe »). Nous proposons de raffiner cette différence en introduisant une nouvelle caractérisation qui nous sera fort utile pour les systèmes sémiolinguistiques mathématiques : continu / digital.

Les systèmes de représentation sémiotiques discrets sont caractérisés par le fait que les traits s'y opposent de manière discrète. « a^b » s'oppose à « ab » par le fait que le « b » en exposant est plus petit et situé plus haut (que le « a »), contrairement au « b » en facteur. Mais « a^b » ne s'oppose pas à « a^b » par exemple⁴ : la signification du décalage vertical est discrète⁵, elle ne varie pas continûment avec ledit décalage. Typiquement, les écritures symboliques sont des systèmes de représentation sémiotiques discrets - il n'y a pas de transition entre secondaire et université par rapport à ces systèmes qui ont été installés bien plus tôt dans les études. Une caractéristique importante (et essentielle pour les mathématiques) des systèmes de représentation sémiotiques discrets est la possibilité d'y opérer des réécritures. Il faut noter qu'il n'y a pas que les écritures symboliques (qui sont un langage au sens strict) sur lesquels on peut opérer des réécritures : les tracés de graphes⁶ sont également des systèmes discrets, où les réécritures, quoi que peu connues, sont possibles⁷.

Par contre, les dessins de figures géométriques sont continus dans le sens où par exemple, la signification (en termes de longueur) du tracé d'un segment varie continûment en fonction de la longueur de ce tracé — il n'en irait d'ailleurs pas de même avec un schéma.

Un système de représentations sémiotique continu peut contenir des éléments discrets (comme l'épaisseur des traits dans un dessin de figure géométrique) mais la réciproque n'est pas vraie. La langue naturelle est soit continu soit discrète suivant le niveau d'analyse linguistique auquel on se situe : les graphèmes, ou les phonèmes s'opposent de manière discrète, mais au niveau du texte et plus encore du discours l'aspect discret et la possibilité d'opérer des réécritures s'estompent fortement.

Ordre I : Savoirs instrumentaux

Les savoirs instrumentaux sont les savoirs d'ordre pratique et leurs métasavoirs. Il s'agit des savoirs directement liés au caractère téléologique (c'est-à-dire orientées vers la réalisation d'un but) des activités où ces savoirs sont mis en oeuvre.

Ce caractère téléologique de l'activité permet de différencier les savoirs instrumentaux des deux autres types de savoirs que nous venons de voir. Par exemple, savoir⁸ que $x(x+1)$ est un produit de facteurs (et identifier lesquels) est nécessaire pour résoudre l'équation $x(x+1) = 0$. Mais ce savoir est indépendant des buts poursuivis. On connaît ou on ne connaît pas la structure d'une expression algébrique, quoi qu'on ait l'intention de faire avec cette expression. Les savoirs instrumentaux, au contraire, sont directement liés aux activités téléologiques : il ne sont pas liés à un but particulier mais au fait que les activités qui les nécessitent ont un but. Les savoirs instrumentaux sont les savoirs des instruments et de leur « mode d'emploi ».

4 le second exposant est situé légèrement moins haut que le premier
 5 ce qui ne signifie pas qu'elle est binaire puisqu'il y a des exposants d'exposant
 6 au sens de la théorie des graphes
 7 v. les travaux de Clerici, Universitat Politecnica de Barcelona.
 8 (au moins en acte)

Il faut distinguer les savoirs instrumentaux suivant la nature des instruments ; en particulier on devra distinguer les instruments matériels (qui opèrent, ou prennent des informations, directement sur la réalisation matérielle des signes, par exemple une règle graduée ou un compas), des instruments sémiotiques (qui opèrent, ou prennent des informations, sur la structure des signes, par exemple la factorisation) et des méta-instruments (qui opèrent, ou prennent des informations, sur les instruments, par exemple les stratégies de résolution de problème).

La prise en compte de la nature discrète ou continue des systèmes de représentation sémiotique peut permettre de repenser l'opposition calcul / raisonnement (dans la mesure où les calculs sont plutôt du côté de la réécriture, donc du discret). C'est particulièrement important pour les transitions, avec des raisonnements qui s'algorithment peu à peu à la faveur de l'introduction d'un système symbolique adéquat (pensons au calcul de probabilités) ou inversement avec des calculs (tels que le « calculus » analytique de dérivation et d'intégration) qui cèdent progressivement la place à des raisonnements où l'étudiant doit « couper les ϵ en 4 » - transition souvent vécue douloureusement.

Savoirs sur les relations entre les trois composantes de l'ordre I.

Si on peut considérer que les trois types de savoirs d'ordre I portent respectivement sur les objets, les représentations et les instruments de l'activité mathématique (que l'on pourrait représenter comme les sommets d'un triangle), alors nous devons encore considérer savoirs correspondant aux côtés de ce triangle, autrement dit :

- les savoirs qui mettent en relation les objets avec leurs représentations (ce qui correspond à la distinction signe/objet signalée plus haut)
- les savoirs qui mettent en relation les représentations avec les instruments (c'est la question des instruments sémiotiques signalée plus haut)
- les savoirs qui mettent en relation les objets avec les instruments (on retrouve ici la problématique de la dialectique outil/objet mise en évidence par Douady (1984).

Savoirs d'ordre II : les principes du jeu mathématique

En règle générale, les principes du jeu mathématique sont ce qui fait que les parties du discours mathématique fonctionnent comme elles sont censées fonctionner. Ils font que les définitions définissent comme elles sont censées définir, et servent à ce à quoi elles sont censées servir, que les théorèmes établissent comme ils sont censés établir etc. Ils font ce qui fait que les mathématiques sont ce qu'elles sont censées être.

Quelques exemples :

- principes qui régissent le fonctionnement des axiomes, des définitions ou des théorèmes et les relations entre ces différents objets mathématiques. Exemple : *définitions* et *propriétés caractéristiques* sont interchangeables sous certaines conditions.
- Une définition (par exemple celle de $f+g$, ou de $a-b$ comme $a+(-b)$) ne sert pas seulement à nommer ou à identifier, mais aussi à calculer et donc à démontrer, par exemple que $a - (b + c) = a - b - c$.
- L'élève qui ne sait pas que, en mathématiques, à partir d'un certain niveau, certaines propriétés doivent être démontrées pour être considérées comme établies, ne démontrera rien et donc ne sera pas considéré par ses professeurs comme faisant des mathématiques.

En ce qui concerne les transitions, nous faisons l'hypothèse (que nous nous proposons de valider empiriquement par l'observation du cas de l'analyse) que les changements -assez souvent implicites- de principes du jeu constituent des obstacles (dans tous les sens, y compris positifs, du terme) bien plus importants que les simples extensions du domaine des objets mathématiques.

Savoirs d'ordre III

C'est ce qui permet l'identification, par exemple la reconnaissance comme étant mathématique (ou analytique, ou algébrique...) des situations. Ces savoirs vont se manifester lorsque les étudiants ne « reconnaissent plus » "leurs" mathématiques (appries dans le secondaires) dans les mathématiques qu'on leur enseigne à l'université. Et bien plus tard, ceux d'entre eux qui s'apprentent à devenir professeurs, risque de ne plus reconnaître dans ce que les programmes ou instructions officielles leur demandent d'enseigner, « les mathématiques » qu'ils ont appris à l'université...

Partie empirique de l'étude

Lors de la présentation à EMF 2006, nous présenterons une analyse en termes épistémographiques du passage (en France) d'une analyse plutôt « empirique » au niveau du secondaire (avec connaissance de fonctions de références et de leurs propriétés) à une analyse hypothético-déductive à l'université. Les Instruments changent, donc les Objets (les fonctions, leurs définitions et leurs propriétés) changent également. Les raisonnements ne sont plus vraiment les mêmes, parce que les principes du jeu ont subtilement changé (tant au niveau du statut épistémique des parties du raisonnement qu'au niveau du genre du discours démonstratif). Les systèmes sémiotiques, quoi que superficiellement semblables, sont en fait différents (dans la mesure où les systèmes d'écritures symboliques doivent permettre maintenant le discours hypothético-déductif) ; parallèlement, les tracés de courbes glissent vers un statut de schémas illustratifs, et partant sont plus discrets et moins continus...

Références :

- Assude T., Drouhard J-Ph (2005) : L'institutionnalisation et l'expérience de la nécessité mathématique" in M-H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy : *Sur la Théorie des Situations Didactiques, Questions, réponses, ouvertures, Hommage à Guy Brousseau*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bagni G. T. (2006) Quali saperi sono acquisiti da chi fa matematica? Una conversazione con Jean-Philippe Drouhard. À paraître dans *La matematica e la sua didattica*.
- Drouhard J-Ph. (À paraître) : La epistemografía : una representación de la organización de los conocimientos matemáticos. Conferencia Plenaria, in *Actas de la 19ª REunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Montevideo, Uruguay.
- Drouhard J-Ph., Panizza M. Perspective Paradigmatique et Ordres de Connaissances. (À paraître) in: A. Mercier (Dir.), *Actes de la 12^{ème} école d'été de Didactiques des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 5-32.
- Ducrot O., Schaeffer J-M. (1995): *Nouveau dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*, Paris : Le Seuil.
- Duval R. (1995): *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne: Peter Lang.

- Duval R. (1996) : Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 16, no.3.
- Duval R. (1998) Signe et Objet (I) Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6. IREM de Strasbourg.
- Duval R. (1998) Signe et Objet (II) Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6. IREM de Strasbourg.
- Duval R. (1998); Ecriture et compréhension. Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? Colloque : *Produire et lire des textes de démonstration*, Univ. Rennes.
- Panizza M., Drouhard J-Ph. (2003) : Los órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativas. In C. Palou de Maté (Comp.), *La Enseñanza y la evaluación: una propuesta para matemática y lengua*. pp. 51-73. Buenos Aires: GEEMA (Grupo Editor Multimedial S.R.L.). Colección: Estudios Universitarios.
- Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J-Ph., Paquelier Y. (2005) : L'expérience de la nécessité épistémique. *RDM*, **25**/1, pp. 57-90.
- Trouche L. (2005): Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *RDM*, **25**/1, pp. 91-138.